TITLE:
スピングラスオーダーパラメータの時間発展(分子場近似による)

AUTHOR(S):
間々田, 博司

CITATION:
間々田, 博司. スピングラスオーダーパラメータの時間発展(分子場近似による). 物性研究 1977, 28(5): 153-159

ISSUE DATE:
1977-08-20

URL:
http://hdl.handle.net/2433/89393

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

スピングラスオーダーパラメータの時間発展（分子場近似による）

愛知教育大学　　間々田　博　司

○　は　じ　め　に

Edwards and Anderson[1] (EA.I)による論文の発表以後，非常に多くの研究[2]がスピングラスの問題に対してなされてきた。EA・I のオーダーパラメータqの物理的な意味はかならずしも明確になっているとは思われないが，このqを扱う方向で多くの試みがなされ，特に Sheerington and Kirkpatrick[3] (SK) のものが厳密に解けた例として注目されている。いずれにしろ，こうした議論は帯磁率に現われる cusp はうまく説明出来るが，比熱の問題はまだ不明確でもあり，また他の Remanence, Aftereffect 等の現象についてはほとんど議論がなされていない。スピングラスの本質的な点についてはいまだ理論的には非常にあいまいな状態にあると思われる。

近年 Edwards and Anderson (EA.II)[4] はオーダーパラメータの dynamics を論じ，スピングラス状態についての興味ある議論を展開した。その時の静的な解が EA・I の replica 公式の結果と一致しないことに注意しておこう。パラメータqの dynamics だけに限れば Fischer[2] によるかなり粗い議論も行われており，オーダーパラメータに関する Critical slowing down を得ている。今，我々はこの問題に対し分子場近似により類似の critical slowing down を得ることが出来，同時にこの簡単な近似から静的な性質がほぼ完全にSKと一致することを示す。

○　$q(t) = [\langle S(t)\rangle^2]_{av}$ の dynamics

先ず話を簡単にするため exchange：J_{ij} が充分に long range でかつ対称に分布する場合の Ising スピングラス系を考える。与えられたスピン（$S_i = \pm 1$）の時刻tでの配位の確率に対して Suzuki and Kubo[5] による Master 方程式を用いる。時刻tにおける配位についての平均を取れば

$$\frac{d}{dt}\langle S_i\rangle = -\frac{1}{\tau}\{\langle S_i\rangle - \langle \tanh\beta E_i\rangle\} \qquad (1)$$

を得る。ただし，τ は熱浴に対する緩和時間であり，E_i は

$$E_i = \Sigma J_{ij} S_j \tag{2}$$

で定義されている。

(1)の両辺に $2\langle S_i\rangle$を乗じた後，J_{ij} についての平均を取ると，

$$\frac{d}{dt} q(t) = -\frac{2}{\tau} \{q(t) - [\langle S_i\rangle\langle\tanh\beta E_i\rangle]_{av}\} \tag{3}$$

を得る。但し $q(t) = [\langle S_i(t)\rangle^2]_{av}$ がスピングラスオーダーパラメータである。(3)の右辺第二項はこのまま展開すると J_{ij} の奇数巾であるため J での展開は不都合である。そこで，配位での平均について熱平衡での関係$\langle S_i\rangle = \langle\tanh\beta E_i\rangle$ を近似的に用いることにすると，右辺第二項は

$$[\langle S_i\rangle\langle\tanh\beta E_i\rangle]_{av} = [\langle\tanh\beta E_i\rangle^2]_{av} \tag{4}$$

また分子場近似により，

$$\langle\tanh\beta E_i\rangle = \tanh\beta \langle E_i\rangle \tag{5}$$

の関係を用いる。さらにこれを βJ で展開して

$$\begin{aligned}
[\langle S_i\rangle\langle\tanh\beta E_i\rangle]_{av} &= [\tanh^2(\beta\Sigma J_{ij}\langle S_j\rangle)]_{av} \\
&= [\{\beta\Sigma J_{ij}\langle S_j\rangle - \frac{1}{3}\beta^3 \sum_{j}\sum_{k}\sum_{l} J_{ij}J_{ik}J_{il}\langle S_j\rangle\langle S_k\rangle\langle S_l\rangle + \cdots\}^2]_{av} \\
&= [\beta^2 \sum_{j}\sum_{k} J_{ij}J_{ik}\langle S_i\rangle\langle S_k\rangle \\
&\quad -\frac{2}{3}\beta^4 \sum_{j}\sum_{k}\sum_{l}\sum_{m} J_{ij}J_{ik}J_{il}J_{im}\langle S_j\rangle\langle S_k\rangle\langle S_l\rangle\langle S_m\rangle + \cdots\cdots]_{av}
\end{aligned} \tag{6}$$

を得る。ここで J_{ij} が対称に分布し，充分に long range であることから，

$$[J_{ij}]_{av} = 0 \qquad [J_{ij}^2]_{av} = \frac{J^2}{N} \tag{7}$$

および高巾の平均値は $1/N$ の高次になると仮定しよう。すると

$$[\Sigma\Sigma J_{ij}J_{ik}\langle S_j\rangle\langle S_k\rangle]_{av} =$$

$$= [\sum_j J_{ij}^2 < S_j >^2]_{av} + [\sum_{j \neq k} \sum J_{ij} J_{jk} < S_j >< S_k >]_{av}$$
$$\simeq J^2 q \tag{8}$$

と近似して良いであろう。（類似の近似はEAⅡ その他でもしばしば用いられる）(8)で無視される項は1/Nの程度の量と考えて良い。同様に(6)の第二項は（ $j=k$， $l=m$ ），（ $j=l$， $k=m$ ），（ $j=m$， $k=l$ ）の場合のみ残して

$$\sum_j \sum_k \sum_l \sum_m [J_{ij} J_{ik} J_{il} J_{im} < S_j >< S_k >< S_l >< S_m >]_{av} \simeq 3J^4 q^2 \tag{9}$$

となり，以下の項も同様に求められる。結局

$$[< S_i >< \tanh \beta E_i >]_{av} = \beta^2 J^2 q - 2\beta^4 J^4 q^2 + O\,[(\beta J \sqrt{q}\,)^6] \tag{10}$$

の如く，O（1/N）を無視して $(\beta J)^2 q$ の展開式が得られる。(10)を(3)に代入してqが小さいとして2次までの式を作ると

$$\frac{d}{dt} q(t) = -\frac{2}{\tau} \{ q - (\beta J)^2 q + 2(\beta J)^4 q^2 \} \tag{11}$$

を得る。(11)式で時間によらない解を $\tilde{q}$ とすれば

$$\{ 1 - (\beta J)^2 + 2(\beta J)^4 \tilde{q} \} \tilde{q} = 0 \tag{12}$$

が成立つから，これから臨界温度 T_c が

$$\beta_c J = 1 \qquad すなわち \qquad kT_c = J \tag{13}$$

で与えられ，

$$\begin{aligned} &T \geq T_c \qquad ならば \qquad \tilde{q} = 0 \\ &T \lesssim T_c \qquad ならば \qquad \tilde{q} = \{ (\beta J)^2 - 1 \} / 2(\beta J)^4 \end{aligned} \tag{14}$$

特に $T \to T_c - 0$ のとき $\tilde{q} = \left(\dfrac{T_c}{T} - 1 \right)$ (15)

等の関係が得られ， T_c 近傍でSKと完全に一致しEA.Ⅰ その他の結果と consistent な関係が求められる。

(11)式に戻って， $T > T_c$ のときqの平衡値は zero であり，平衡に近い条件を考えて

いるから，qで線型化して

$$\frac{d}{dt}q(t)=-\frac{2}{\tau}\left[1-(\beta J)^2\right]q(t) \tag{16}$$

より
$$q(t)=q(0)\exp\left\{-\frac{2}{\tau}\left[1-\left(\frac{T_c}{T}\right)^2\right]t\right\},\quad T>T_c \tag{17}$$

に従って減衰することがわかる。特に$T\to T_c+0$のときには

$$q(t)\simeq q(0)\exp\left[-\frac{4}{\tau}\left(1-\frac{T_c}{T}\right)t\right] \tag{17'}$$

となる。

同様に$T\lesssim T_c$のとき$q(t)=\tilde{q}+q'(t)$としてq'で線型化する。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}q'(t)&=-\frac{2}{\tau}\left\{\left[1-(\beta J)^2\right]+4(\beta J)^4\tilde{q}\right\}q'(t)\\&=-\frac{2}{\tau}\left[\left(\frac{T_c}{T}\right)^2-1\right]q'(t)\end{aligned} \tag{18}$$

これから

$$q(t)=\tilde{q}+(q(0)-\tilde{q})\exp\left\{-\frac{2}{\tau}\left[\left(\frac{T_c}{T}\right)^2-1\right]t\right\} \tag{19}$$

特に$T\to T_c-0$のとき

$$q(t)\simeq\tilde{q}+(q(0)-\tilde{q})\exp\left\{-\frac{4}{\tau}\left(\frac{T_c}{T}-1\right)t\right\} \tag{19'}$$

の如く平衡値$\tilde{q}$に向って減衰して行くことがわかる。(17')，(19')で見るように緩和時間は$T\to T_c\pm 0$につれて無限に長くなり，他の相転移の場合と同様，critical slowing downを示すことが解る。この結果はEA. Ⅱ[(4)]，および Fischer[(2)]の得たものと類似である。同様な式から出発した Fischer のものと較べて，緩和時間について因子2だけ異っているが，我々の場合のほうがごく自然な dynamics への拡張になっていると思われる。ここで求められた$q(t)$はEA. Ⅱ と異ってスピンの時間相関ではないため動的帯磁率と直接の関係はない。この系に critical slowing down を伴う緩和現象があることを示しているにすぎない。

○　系の静的な性質

以上のように簡単な分子場近似を用い，J_{ij}^2 の展開を可能にするような若干の工夫をすると $q(t) = [\langle S(t)\rangle^2]_{av}$ の dynamics が構成出来ることを示した。ここで (10)式の static な場合，すなわち

$$q = [\langle S_j\rangle^2]_{av} = [\tanh^2\beta\langle E_i\rangle]_{av} \tag{20}$$

の高次の巾がどうなるかを考えてみる。いずれにしろ，$\tanh^2$ の展開であるから，その 2n 次の項は

$$\beta^{2n}\sum_{j_1}\sum_{j_2}\cdots\sum_{j_{2n}} J_{ij_1}J_{ij_2}\cdots J_{ij_{2n}}\langle S_{j_1}\rangle\langle S_{j_2}\rangle\cdots\cdots\langle S_{j_{2n}}\rangle \tag{21}$$

であり，J_{ij} 平均をして残るのは，それぞれ一対の j_α が等しい場合で，それ以外は1/N の高次となるはずであるから，(21)式の J_{ij} 平均は

$$\frac{(2n)!}{n!(2!)^n}(\beta J)^{2n}q^n = (2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1(\beta J)^{2n}q^n \tag{22}$$

となる。前の係数は 2n 個を 2 個づつの pair n 個に分配する方法の数である。ところで，SK の(10)式で m = 0 の場合

$$q = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\tanh^2(\beta J\sqrt{q}\,x)\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \tag{23}$$

から q が決定される。(23)式の $\tanh^2$を展開し $(\beta J)^{2n}q^n$ の展開項に現われる係数は

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int x^{2n}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = (2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1 \tag{24}$$

となる。(22)と(24)の係数が一致することは，$[\tanh^2\beta\langle E_i\rangle]_{av}$ を βJ で展開し各項に我々の近似を行うことと，$\tanh^2(\beta J\sqrt{q}\,x)$ をガウス分布で計算する（SK）[3] こと，または Plefka[6] のように$\langle S\rangle^2 = \tanh^2\beta H$ で与えられる量を分子場の分布

$$(2\pi qJ^2)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{H^2}{2qJ^2}\right)$$

で平均することが完全に一致していることを示している。

同様な考え方により，Ising スピングラス系の内部エネルギーについての議論をつけ加えよう。計算すべき量は

$$U = -\sum_{<i,j>} [J_{ij} <S_i S_j>]_{av} \tag{25}$$

であるから，スピン i と j に注目してその有効ハミルトニアンを

$$\mathcal{H} = -J_{ij} S_i S_j - (H_i S_i + H_j S_j) \tag{26}$$

としよう。ここで，$H_i H_j$ はそれぞれ S_i，S_j に作用する有効磁場で，分子場近似に従って

$$\begin{aligned} H_i &= \Sigma' J_{ik} <S_k> \quad (\text{和は } k = j \text{ を除く}) \\ H_j &= \Sigma' J_{jl} <S_l> \quad (\text{和は } l = i \text{ を除く}) \end{aligned} \tag{27}$$

で定義される。(27)のハミルトニアンから，$\langle S_i S_j \rangle$は，

$$\begin{aligned} <S_i S_j> &= \mathrm{Tr}(S_i S_j e^{-\beta\mathcal{H}})/\mathrm{Tr}(e^{-\beta\mathcal{H}}) \\ &= \frac{e^{\beta J_{ij}} \cosh\beta(H_i + H_j) - e^{-\beta J_{ij}} \cosh\beta(H_i - H_j)}{e^{\beta J_{ij}} \cosh\beta(H_i + H_j) + e^{-\beta J_{ij}} \cosh\beta(H_i - H_j)} \end{aligned} \tag{28}$$

のように求められる。(27)式のように H_i，H_j はボンド J_{ij} を含まないことに注意し，(7)式の関係を用いると，J_{ij} のみの平均を取ったあと

$$[J_{ij} <S_i S_j>]_{av} = \frac{\beta J^2}{N} (1 - [\tanh^2\beta H_i \cdot \tanh^2\beta H_j]_{av}) \tag{29}$$

が成立する。

ところが，(27)式より 1/N 程度を無視すれば実質上

$$H_i \simeq <E_i> \qquad H_j \simeq <E_j> \tag{30}$$

として良い。すなわち

$$\begin{aligned} [\tanh^2\beta H_i \cdot \tanh^2\beta H_j]_{Av} &\simeq [\tanh^2\beta <E_i> \tanh^2\beta <E_j>]_{av} \\ &\simeq [\tanh^2\beta <E_i>]_{av} [\tanh\beta <E_j>]_{av} \end{aligned} \tag{31}$$

となる。ここでも 1/N を無視している。

(20) (25)(29)(30)より

$$U = -\frac{1}{2} N\beta J^2 (1 - q^2) \tag{32}$$

が得られる。(32)式は m= 0 の場合のＳＫおよび Plefka のそれよりは tricky でないと思

われる。

以上のように非常に簡単な考え方から，かなり面倒な計算を要する replica 公式による結果（S・K）がほぼ完全に再現されることが解った。EA・I の序で述べられている q の物理的な内容が replica 公式で求められることに若干疑問が感じられる。

参 考 文 献

(1) S. F. Edwards and P. W. Anderson, J. Phys F; Metal Phys. **5** (1975) 965

(2) K. H. Fischer, Physica 86–88 B + C (1977) 813

およびこの論文の Reference 参照

(3) D. Sherrington and S. Kirkpatrick, Phys. Rev. Letters **35** (1975) 1792

(4) S. F. Edwards and P. W. Anderson, J. Phys. F; Metal Phys. **6** (1976) 1927

(5) M. Suzuki and R. Kubo, J. Phys. Soc. Japan, **24** (1968) 51

(6) T. Plefka, J. Phys. F; Metal Phys. **6** (1976) L327.